



SOS MAT

El número **e** es un número irracional, y aunque los logaritmos creados por Napier tienen como base un número cercano a $\frac{1}{e}$, se conoce a los logaritmos con base **e** como neperianos, en su honor.

$$e \approx 2,718281828459$$

Propiedades de los logaritmos

Se llama **logaritmo común** a aquel cuya base es **10**. Por convención, se expresa $\log_{10} a$ como **log a**, es decir:

$$\log_{10} a = \log a$$

Se llama **logaritmo neperiano** o **logaritmo natural** a aquel cuya base es **e**. Por convención, se expresa $\log_e a$ como **ln a**, es decir:

$$\log_e a = \ln a$$

A continuación, se analizarán algunas propiedades de los logaritmos y su operatoria.

1. Logaritmo de la unidad.

Observa:

$$7^0 = 1 \quad 20^0 = 1 \quad 12^0 = 1$$

Luego, por definición:

$$7^0 = 1 \leftrightarrow \log_7 1 = 0 \quad 20^0 = 1 \leftrightarrow \log_{20} 1 = 0$$

$$12^0 = 1 \leftrightarrow \log_{12} 1 = 0$$

En general, para todo número real positivo $b \neq 0$, se tiene que $b^0 = 1$, luego:

$$\log_b 1 = 0$$

Es decir, el logaritmo de **1**, en cualquier base, es igual a **0**.

2. Logaritmo de la base.

Observa:

$$5^1 = 5 \quad 8^1 = 8 \quad 19^1 = 19$$

Luego, por definición:

$$5^1 = 5 \leftrightarrow \log_5 5 = 1 \quad 8^1 = 8 \leftrightarrow \log_8 8 = 1$$

$$12^1 = 12 \leftrightarrow \log_{12} 12 = 1$$

En general, para todo número real $b \neq 0$, se tiene que $b^1 = b$, por lo tanto:

$$\log_b b = 1$$

Es decir, el logaritmo de la base es igual a **1**.

3. Logaritmo de una potencia de la base.

Se tiene para todo número real positivo $b \neq 0$:

$$b^n = b^n$$

Luego, por definición:

$$b^n = b^n \leftrightarrow \log_b b^n = n$$

$$\log_b b^n = n$$

Es decir, el logaritmo de una potencia de la base del logaritmo es igual al exponente de la potencia.

4. Logaritmo de una potencia.

Se tiene:

$$c = \log_b a \leftrightarrow b^c = a$$

Elevando a un número x la segunda igualdad, se obtiene:

$$(b^c)^x = a^x$$

$$b^{cx} = a^x$$

Luego, por definición:

$$b^{cx} = a^x \leftrightarrow \log_a b^{cx} = c \cdot x$$

Por lo tanto, como $c = \log_b a$, se tiene que:

$$\log_b a^x = x \log_b a$$

Es decir, el logaritmo de una potencia de un número es igual al producto entre el exponente de la potencia y el logaritmo del número.

Ejemplo

Si $\log 5 \approx 0,7$; calcula $\log 125 + \log 25 - \log 1.000$.

Se tiene:

$$125 = 5^3 \quad 25 = 5^2 \quad 1.000 = 10^3$$

Al reemplazar en la expresión, se obtiene:

$$\begin{aligned} \log 125 + \log 25 - \log 1.000 &= \log 5^3 + \log 5^2 - \log 10^3 \\ &\stackrel{\text{Por propiedad 4.}}{=} 3 \cdot \log 5 + 2 \cdot \log 5 - 3 \stackrel{\text{Por propiedad 4.}}{=} \\ &\approx 3 \cdot 0,7 + 2 \cdot 0,7 - 3 = 0,5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\log 125 + \log 25 - \log 1.000 \approx 0,5$.

5. Logaritmo de una raíz.

Se tiene que $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, por lo tanto, se aplica la propiedad 4.

$$\log_b \sqrt[n]{a^m} = \log_b a^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \cdot \log_b a$$

$$\log_b \sqrt[n]{a^m} = \frac{m}{n} \cdot \log_b a$$

Ejemplo

Calcula $\log \sqrt{100.000} + \log_2 \sqrt[3]{64}$.

$$\log \sqrt{100.000} + \log_2 \sqrt[3]{64} = \log \sqrt{10^5} + \log_2 \sqrt[3]{2^6} = \frac{5}{2} \underbrace{\log 10}_1 + \frac{6}{7} \underbrace{\log_2 2}_1 = \frac{47}{14}$$

6. Logaritmo de un producto.

Sean:

$$x = \log_b p \Leftrightarrow b^x = p \quad y = \log_b q \Leftrightarrow b^y = q$$

Entonces:

$$\begin{aligned} pq &= b^x b^y = b^{x+y} \\ \log_b (pq) &= \log_b (b^{x+y}) = x + y \end{aligned}$$

$$\log_b (pq) = \log_b p + \log_b q$$

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

Ejemplos

1. Desarrolla $\log_3 (27a^5)$.

$$\begin{aligned} \log_3 (27a^5) &= \log_3 27 + \log_3 a^5 \\ &= \log_3 3^3 + 5\log_3 a \\ &= 3 + 5\log_3 a \end{aligned}$$

2. Si $\ln 5 \approx 1,61$ y $\ln 3 \approx 1,01$; calcula $\ln 45$.

$$\begin{aligned} \ln 45 &= \ln (3^2 \cdot 5) = \ln 3^2 + \ln 5 \\ &= 2 \cdot \ln 3 + \ln 5 \\ &\approx 2 \cdot 1,01 + 1,61 = 3,63 \end{aligned}$$

CALCULADORA

En algunas calculadoras existen las teclas \log ,

que indica logaritmo en base 10, y \ln ,

que indica el logaritmo en base e.

Si se quiere calcular $\log 5$, existen dos formas, dependiendo de la calculadora:

1. Se presiona \log , se digita 5 y finalmente se presiona enter o $=$.
2. Se digita 5 y se presiona \log .

En ambos casos, el resultado es **0,69897...**

Para calcular logaritmos naturales, se utiliza

la tecla \ln .

SOS MAT

Utilizando las propiedades, solo se necesitan los logaritmos de los números primos para obtener el logaritmo de cualquier número racional, ya que todos los números enteros se pueden descomponer en factores primos.

Por ejemplo, si se tiene el valor de los logaritmos de todos los números primos menores que 100, se pueden obtener los valores de los logaritmos de 1 a 100.

Ejemplos

1. $\log 38 = \log (2 \cdot 19) = \log 2 + \log 19$
2. $\log 49 = \log (7^2) = 2\log 7$

7. Logaritmo de un cociente.

Sean:

$$x = \log_b p \rightarrow b^x = p \qquad y = \log_b q \rightarrow b^y = q$$

Entonces:

$$\frac{p}{q} = \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$$

$$\rightarrow \log_b \left(\frac{p}{q} \right) = \log_b (b^{x-y}) = x - y$$

$$\log_b \left(\frac{p}{q} \right) = \log_b p - \log_b q$$

El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el logaritmo del divisor.

Ejemplos

1. Desarrolla $\log_2 \left(\frac{32}{4} \right)$.

$$\log_2 \left(\frac{32}{4} \right) = \log_2 32 - \log_2 4$$

$$= 5 - 2 = 3$$

En efecto, $\log_2 \left(\frac{32}{4} \right) = \log_2 8 = 3$.

2. Desarrolla $\log \frac{b^2 d}{h^3}$.

$$\log \frac{b^2 d}{h^3} = \log (b^2 d) - \log (h^3) = \log b^2 + \log d - 3 \log h$$

$$= 2 \log b + \log d - 3 \log h$$

8. Cambio de base.

Las calculadoras solo permiten calcular logaritmos en base **10** o **e**. Para calcular logaritmos en otra base, se utiliza la siguiente propiedad.

Sea $\log_p a = x$. Se tiene:

$$\left. \begin{aligned} p^x &= a & / \log_b \\ \log_b (p^x) &= \log_b a \\ x \log_b p &= \log_b a \\ x &= \frac{\log_b a}{\log_b p} \end{aligned} \right\} \log_p a = \frac{\log_b a}{\log_b p}$$

Entonces, basta tomar **b = 10** o **b = e** para determinar el valor pedido utilizando la calculadora.

Ejemplo

Para calcular $\log_3 7$, se expresa en función de logaritmos de base **10** o **e**.

Cambio a base 10

$$\log_3 7 = \frac{\log 7}{\log 3} \approx \frac{0,845}{0,477} \approx 1,77$$

Cambio a base e

$$\log_3 7 = \frac{\ln 7}{\ln 3} \approx \frac{1,946}{1,099} \approx 1,77$$

> PRACTICA

Calcula el valor de las siguientes expresiones.

1. $\log_5 \frac{1}{25} + \log_4 64 - \log 100$

2. $\log_2 (2 + \sqrt{2}) + \log_2 (2 - \sqrt{2})$

3. $\frac{\log_5 \frac{1}{125} + \log_7 49}{\log_3 \sqrt[3]{81}}$

4. $\frac{\log_8 (\sqrt[3]{0,25})}{\log_9 27 + \log_8 2 + \log_7 1}$

5. $\frac{\log_{81} \frac{1}{9} + \log_{\frac{1}{9}} 3}{\log \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{1}{9}}$

6. $(\log_2 \sqrt[7]{8^3} + \log_3 \sqrt[5]{243})^{\log 100}$

Si $\log 2 \approx 0,301$; $\log 3 \approx 0,477$; $\log 5 \approx 0,698$; $\log 7 \approx 0,845$ y $\log 17 \approx 1,23$ calcula las siguientes expresiones.

7. $\log \frac{1}{25} + \log 72$

11. $\log 12,5$

8. $\log 3,5$

12. $\log 0,25$

9. $\log 120$

13. $\log 84$

10. $\log 32 - \log 56$

14. $\log \frac{25}{28}$

Utilizando cambio de base y los valores anteriores, calcula.

15. $\log_2 100$

18. $\log_{15} 120$

16. $\log_3 25$

19. $\log_{160} 1.000$

17. $\log_4 18$

20. $\log_{170} 2.000$

Aplicando las propiedades de los logaritmos, escribe las siguientes expresiones como un solo logaritmo.

21. $\log a + \log b + \log c$

22. $4\log a - 5\log b - \frac{1}{5}\log(10 - 2b)$

23. $\log(a + 2,5b) - \frac{1}{3}\log a$

24. $\log a + 2\log b - \log a - \log(a + b)$

25. $\frac{1}{2}\log a - \frac{1}{2}\log b + \frac{1}{8}(\log c + 5\log b)$

26. $9\log a - \frac{1}{3}\log(x - 3d) + \frac{1}{2}\log(d - 6a + 4b)$

27. $\log(a^2 - b^2) - \log(a + b)$

28. $\frac{1}{3}(\log a^2 - 5\log b^2) + \frac{5}{7}\log(x - b) + \log c$

29. $\frac{3(\log a - (5\log b^2 + \frac{5}{7}\log c))}{5}$

Aplicando las propiedades de los logaritmos, desarrolla las siguientes expresiones.

30. $\log \sqrt[n]{\frac{6a}{\frac{1}{5}}}$

31. $\log \frac{2a\sqrt[7]{v} \cdot \sqrt[5]{(a-b)^3}}{5\sqrt[4]{c}}$

Realiza, en cada caso, lo pedido.

32. Si $\log 2 = x$ y $\log 7 = z$, determina $\log 175$, en función de x y z .

33. Si $\log_c p = x$, determina el valor de $\log_p c$, en función de x .

34. Si $\log_4 b - \log_4 c = 15$, ¿qué valor tiene la expresión $\frac{c}{b}$?

35. Si $a = 100b$, calcula el valor de $\log a - \log b$.

Ejercicios resueltos

1. Si $\log x^2 + \log x = \log 27$ y $\log_y 32 = 5$, ¿cuál es el valor de xy ?

Se determina el valor de x :

Se aplican propiedades de los logaritmos para determinar el valor de x .

$$\begin{aligned} \log x^2 + \log x &= \log 27 \\ 2\log x + \log x &= \log 3^3 \\ 3\log x &= 3 \cdot \log 3 \\ \log x &= \log 3 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Se determina el valor de y :

Se aplica la definición de logaritmo para determinar el valor de y .

$$\begin{aligned} \log_y 32 &= 5 \\ y^5 &= 32 \\ y^5 &= 2^5 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Se calcula el valor pedido.

Por lo tanto, $xy = 6$, ya que, $xy = 3 \cdot 2 = 6$.

2. Demuestra si cada proposición es verdadera o da un contraejemplo si es falsa.

I. $(\log_a b)(\log_b a) = 1$

II. $\log_a \sqrt{b} = \sqrt{\log_a b}$

III. $\log_a b = \log_a c + \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$

Para la proposición I, se tiene:

Se aplica la propiedad de cambio de base para luego simplificar.

$$(\log_a b)(\log_b a) = \log_a b \cdot \frac{\log_a a}{\log_a b} = \log_a a = 1$$

Por lo tanto, la proposición I es verdadera.

Para la proposición II, se tiene:

Se aplica la propiedad de logaritmo de una raíz.

$$\log_a \sqrt{b} = \frac{1}{2} \log_a b$$

Por lo tanto, la proposición afirma que $\frac{1}{2} \log_a b = \sqrt{\log_a b}$, lo que claramente es falso. Si se toma $a = b = 3$ se tiene un contraejemplo.

$$\frac{1}{2} \log_3 3 = \frac{1}{2} \qquad \sqrt{\log_3 3} = \sqrt{1} = 1$$

Para la proposición III, se tiene:

Se aplica la propiedad de logaritmo de un cociente.

$$\log_a c + \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a c + \log_a b - \log_a c = \log_a b$$

Por lo tanto, la proposición III es verdadera.